Proceedings of IAM, V.12, N.1, 2023, pp.76-84
DOI: 10.30546/2225-0530.12.1.2023.76

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ И УПРАВЛЕНИЙ ПРИ ДОБЫЧЕ НЕФТИ ГАЗЛИФТНЫМ СПОСОБОМ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Н.С. Гаджиева[1], Ф.А. Алиев[1,2],

[1]Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, Баку, Азербайджан
[2]Институт Информационных Технологий, Министерство Науки и Образования, Баку, Азербайджан
e-mail: nazile.m@mail.ru, f_aliev@yahoo.com

Резюме. В статье рассматривается простая математическая модель общей задачи добычи нефти газлифтном способом для стационарного случая. Задача формулируется в рамках линейно квадратичной задачи оптимизации, которая используется при выборе программных траекторий и управлений. Приводится вычислительный алгоритм для нахождения оптимальной программной траектории и управления.

Ключевые слова: газлифт, расширенный функционал, уравнение Эйлера-Лагранжа, матрица Гамильтона.

AMS Subject Classification: 49M25, 49N20.

1. Введение

Несмотря на то, что газлифтный метод добычи нефти широко распространен [1-4, 15], до настоящего времени отсутствует построение программных траекторий и управлений, а также соответствующих регуляторов. Отметим, что нахождение этих параметров теоретически обосновано [5, 6, 8], но их использование для решения конкретных практических задач затруднено [9, 11]. Поэтому, в данной работе построение программных траекторий и управлений будет формулироваться как решение линейной квадратичной задачи оптимизации с двухточечными неразделенными краевыми условиями.

С помощью построения расширенного функционала получены соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа для различных интервалов времени. Для граничных точек фазовых координат и вектора Лагранжа получена система линейных алгебраических уравнений. Показано, что как периодические режимы, так и другие получаются как частные случаи.

2. Постановка задачи

Пусть движение газа в кольцевом пространстве при добыче нефти газлифтным способом описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(x) = F_1 y(x),\ 0 < x < l, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0 = u, \qquad (2)$$

где матрица F_1 имеет размерности $n \times n$, $y(x)$ - $n \times 1-$мерный вектор фазовых координат, u - $n \times 1-$мерный вектор управляющих воздействий.

На линии l газ смешивается с нефтью в пластах [7]

$$y(l+0) = F_\delta y_г(l-0) + F_\chi y_н(l-0), \qquad (3)$$

где F_δ, F_χ матрицы размерности $n \times n$, которые определяются из соответствующих задач идентификации [16], $y_г$ - нагнетательный газ, двигающийся в кольцевом пространстве, $y_н$ - объем нефти, протекающий в пласте и, смешиваясь, образует в начале подъемника газожидкостную смесь (ГЖС).

Пусть движение ГЖС в подъемнике при добыче нефти газлифтным способом описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(x) = F_2 y(x),\ l < x < 2l, \qquad (4)$$

где матрица F_2 имеет размерности $n \times n$.

Требуется найти начальный объем газа u из (2) так, чтобы

$$\Phi_1 y(l-0) - \Phi_2 y(2l) = q, \qquad (5)$$

где Φ_1, Φ_2 матрицы размерности $k \times n$, q - $k \times 1-$мерный вектор.

Математический смысл (5) заключается в том, что сколько частей ГЖС требуется взять на башмаке в конце подъемнике.

Требуется найти такое значение u, которое при условиях (1)-(5) доставлял бы следующему функционалу

$$J = \frac{1}{2}u'Cu + \frac{1}{2}y'(l+0)Q_1 y(l+0) + \frac{1}{2}\int_0^l y'(x)Qy(x)dx + \frac{1}{2}\int_l^{2l} y'(x)\tilde{Q}y(x)dx \qquad (6)$$

экстремальное значение, где $C, Q_1, Q, \tilde{Q}$ - симметричные матрицы размерности $n \times n$, $C < 0,\ Q_1 > 0,\ Q > 0,\ \tilde{Q} > 0.$

3. Построение программных траекторий и управлений

С помощью множителей Лагранжа задачу (1)-(6) можно свести к некоторой неразделенной двухточечной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, для того чтобы показать это, аналогично [14], составим расширенный функционал для задачи (1)-(6), прибавив к J систему уравнений (1), (4) и условия (2), (3) с множителем Лагранжа $\lambda(x)$, граничное условие (5) с постоянным множителем ν. Тогда опишем уравнение Эйлера-Лагранжа в следующем виде [10]

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = F_1 y(x), \\ \dot{\lambda}(x) = -Qy(x) - F_1' \lambda(x), \end{cases} \quad 0 < x < l, \tag{7}$$

$$x = l \quad \begin{cases} y(l+0) = F_\chi y(l-0) - F_\delta e^{F_1 l} C^{-1} e^{F_1' l} F_\delta \lambda(l+0), \\ \lambda(l-0) = Q_1 y(l-0) + F_\chi' \lambda(l+0), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = F_2 y(x), \\ \dot{\lambda}(x) = -\tilde{Q} y(x) - F_2' \lambda(x), \end{cases} \quad l < x < 2l, \tag{9}$$

$$u = -C^{-1} \lambda(0) \tag{10}$$

с краевым условиями

$$\Phi_1' \nu - \lambda(l-0) = 0, \tag{11}$$

$$\Phi_2' \nu + \lambda(2l) = 0. \tag{12}$$

Систему уравнений (11), (12) представим в более удобном виде [12]

$$\Phi' \nu = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \lambda(l-0) - \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \lambda(2l), \tag{13}$$

где $\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2]$.

Один из возможных путей решения задачи (8)-(13), (5) состоит в следующем. Предположим, что матрица Φ имеет полный ранг. Тогда как в [12] ее можно представить в виде [17]:

$$\Phi' = \tilde{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \tag{14}$$

где $\tilde{P}$ и Q некоторые невырожденные матрицы размерностей $2n \times 2n,\ k \times k,$ соответственно.

Пусть матрица $\tilde{P}$ разбита на блоки:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где P_1, P_2 и P_3, P_4- матрицы размерностей $k \times n$ и $(2n-k) \times n$, соответственно.

Подставляя (14) в (13), учитывая (15), получим, что между $\lambda(l-0)$ и $\lambda(2l)$ существует следующее соотношение:

$$P_3\lambda(l-0) - P_4\lambda(2l) = 0. \tag{16}$$

Заметим, что (16) вместе с условием (5) дает $2n$ краевых условий.

Обозначая $z(x) = \left[y(x) \quad \lambda(x)\right]'$, краевую задачу (7), (9), (5), (16) можно привести к виду:

$$\dot{z}(x) = H_1 z(x),\ \ 0 < x < l, \tag{17}$$

$$\dot{z}(x) = H_2 z(x),\ l < x < 2l, \tag{18}$$

$$Az(l-0) + Bz(2l) = q_1, \tag{19}$$

где

$$H_1 = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ -Q & -F_1' \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ -\tilde{Q} & -F_2' \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -\Phi_2 & 0 \\ 0 & -P_4 \end{bmatrix},$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Находим решение дифференциальных уравнениях (17), (18) в виде [10]

$$z(l-0) = \begin{bmatrix} e^{F_1 l} & 0 \\ \tilde{H}_1 & e^{F_1' l} \end{bmatrix} z(0), \tag{20}$$

$$z(2l) = \begin{bmatrix} e^{F_2 l} & 0 \\ \tilde{H}_2 & e^{F_2' l} \end{bmatrix} z(l+0), \tag{21}$$

где

$$\tilde{H}_1 = e^{-F_1' l} D - D e^{F_1 l},\ \ \tilde{H}_2 = e^{-F_2' l} D_1 - D_1 e^{F_2 l},$$

$$DF_1 - F_1' D + Q = 0, \quad -D_1 F_2 - F_2' D_1 + \tilde{Q} = 0.$$

Уравнение (8) представим в виде

$$z(l+0)=\Delta^{-1}\begin{bmatrix} F_\chi & 0 \\ -Q_1 & E \end{bmatrix} z(l-0), \tag{22}$$

где

$$\Delta=\begin{bmatrix} E & F_\delta e^{F_1 l} C^{-1} e^{F_1' l} F_\delta' \\ 0 & F_\chi' \end{bmatrix}.$$

Здесь мы предположим, что Δ^{-1} существует.

Подставляя (22) в (21), получим, что между $z(l-0)$ и $z(2l)$ существует следующее соотношение:

$$z(2l)=\begin{bmatrix} e^{F_2 l} & 0 \\ \tilde{H}_2 & e^{F_2' l} \end{bmatrix} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} F_\chi & 0 \\ -Q_1 & E \end{bmatrix} z(l-0). \tag{23}$$

Объединяя уравнения (19), (23), получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & -\Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & -P_4 \\ K & -E & L & 0 \\ G & 0 & M & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(l-0) \\ y(2l) \\ \lambda(l-0) \\ \lambda(2l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где

$$K=e^{F_2 l} F_\chi + e^{F_2 l}\frac{1}{F_\chi'} F_\delta e^{F_1 l} C^{-1} e^{F_1' l} F_\delta' Q_1,$$

$$G=\tilde{H}_2 F_\chi + (\tilde{H}_2 \frac{1}{F_\chi'} F_\delta e^{F_1 l} C^{-1} e^{F_1' l} F_\delta' + e^{-F_2' l}\frac{1}{F_\chi'})Q_1,$$

$$L=-e^{F_2 l}\frac{1}{F_\chi'} F_\delta e^{F_1 l} C^{-1} e^{F_1' l}\frac{1}{F_\delta'},$$

$$M-(\tilde{H}_2 \frac{1}{F_\chi'} F_\delta e^{F_1 l} C^{-1} e^{F_1' l} F_\delta' + e^{-F_2' l}\frac{1}{F_\chi'}).$$

Если главный определитель этой системы отличен от нуля, то мы получаем уникальные значения для неизвестных. После определения $y(l-0)$, $\lambda(l-0)$ из (24), мы находим $y(0)$, $\lambda(0)$ из (20). Подставляя $\lambda(0)$ в (10), мы определим оптимальное управление u. Тогда, если решить уравнение (1) [13] с начальным условием $y(0)=u$, то найдем значения функций $y(x)$ в интервале $(0,\ l)$. Далее, после определения $y(l-0)$ из (24), мы находим

$y(l+0)$ из (22). Затем, используя это значение как начальное условие для уравнения (4), находим значения функции $y(x)$ в интервале $(l, 2l)$.

Таким образом, решая данную задачу, мы определяем программные траектории и управления $y_{pr}(x)$ и u_{pr}.

Таким образом, мы можем построить следующий алгоритм.

Алгоритм.

1. Формируются матрицы $F_1, F_2, F_\chi, F_\delta, \Phi_1, \Phi_2, C, Q_1, Q, \tilde{Q}$ и вектор q, заданные в (1)-(6).
2. С использованием (14) и (15) строятся матрицы P_3, P_4.
3. Строятся матрицы $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$, входящие в (20) и (21).
4. Строятся матрицы K, G, L, M, входящие в (24).
5. Решая уравнение (24), находим $y(l-0), \lambda(l-0)$.
6. Если мы заменим полученное $y(l-0), \lambda(l-0)$ в (20), то найдем $y(0), \lambda(0)$.
7. Учитывая полученное $\lambda(0)$ в (10), получаем оптимальное управление u.
8. Если решить уравнение (1) в пределах начального условия $y(0)=u$, то получим значения функции $y(x)$ в интервале $(0, l)$.
9. Подставляя $y(l-0), \lambda(l-0)$ в (22), находим $y(l+0)$.
10. Если решить уравнение (4) в пределах начального условия $y(l+0)$, то получим значения функции $y(x)$ в интервале $(l, 2l)$.

Литература

1. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Ilyasov M.K., Mathematical simulation and control of gas lift, Journal of Computer and Systems Sciences International, V.50, 2011, pp.805-814.
2. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A. Computer Simulation of Crude Oil Extraction Using a Sucker Rod Pumping Unit in the Oil Well–Resevoir System, International Applied Mechanics, V.55, N.3, 2019, pp.332-341.
3. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identification problem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int. Applied Mechanics, V.55, 2019, pp.110-116.

4. Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Mammadova G.H., Namazov A.A., Khalilov M.S. Identification of the Parameters of a Discrete Gas-Lift Proces Journal of Computer and Systems Sciences International, V.61, N.5, 2022, pp.805-812.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mamedova E.V., Mukhtarova N.S. Computational algorithm for solving problem of optimal boundary-control with nonseparated boundary conditions, Journal of Computer and Systems Sciences International V.55, 2016, pp.700-711.
6. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.S. Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, V.76, 2015, pp.627-633.
7. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, Applied and Computational Mathematics, V.15, N.3, pp.370-376.
8. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam, Gordon and Breach Sci., 1998, 272 p.
9. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, 2022, 410 p.
10. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Safarova N.A., Maharramov I.A., Kuliyev K.A. Optimal stabilization problems of oil production by gas lift method - stationary case, Proceedings of IAM, V.11, N.1, 2022, pp.17-26.
11. Aliev, F.A., Larin, V.B., Naumenko, K.I., Suntsev, V.I. Optimization of Linear Time Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, 1978.
12. Aliev, F.A. Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Elm, Baku, 1989.
13. Andreev, Yu.I. Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, 1976.
14. Bryson, A., Ho, Yu.Sh. Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, 1972.
15. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A. Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., V.5, N.1, 2014, pp.130-137.
16. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах, Нелинейные колебания, 2014, т.17, №2, сс.151 –160.
17. Курцевич В.М., Лычак М.М. О решении дискретных матричных уравнений Ляпунова, Риккати и их обобщений, Кибернетика, 1980, №3, сс.13-18.

ALGORITHM FOR FINDING PROGRAM TRAJECTORIES AND CONTROLS DURING OIL PRODUCTION BY THE GAS LIFT METHOD IN GENERAL CASE

N.S. Hajiyeva[1], F.A. Aliev[1,2]

[1]Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Information Technology, Ministry of Science and Education, Baku, Azerbaijan
e-mail: nazile.m@mail.ru, f_aliev@yahoo.com

Abstract. The article considers the simple mathematical model of the general problem of oil production by gas lift for a stationary case. The problem is formulated within the framework of the linear quadratic optimization problem, where it is used to select program trajectories and controls. A computational algorithm is presented for finding the optimal program trajectory and control.

Keywords: gaslift, extended functional, Euler-Lagrange equation, Hamilton matrix.

References

1. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Ilyasov M.K., Mathematical simulation and control of gas lift, Journal of Computer and Systems Sciences International, V.50, 2011, pp.805-814.
2. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A. Computer Simulation of Crude Oil Extraction Using a Sucker Rod Pumping Unit in the Oil Well–Resevoir System, International Applied Mechanics, V.55, N.3, 2019, pp.332-341.
3. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identification problem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int. Applied Mechanics, V.55, 2019, pp.110-116.
4. Aliev F.A., Hajiyeva N.S., Mammadova G.H., Namazov A.A., Khalilov M.S. Identification of the Parameters of a Discrete Gas-Lift Proces Journal of Computer and Systems Sciences International, V.61, N.5, 2022, pp.805-812.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mamedova E.V., Mukhtarova N.S. Computational algorithm for solving problem of optimal boundary-control with nonseparated boundary conditions, Journal of Computer and Systems Sciences International V.55, 2016, pp.700-711.
6. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.S. Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, V.76, 2015, pp.627-633.

7. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, Applied and Computational Mathematics, V.15, N.3, pp.370-376.
8. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam, Gordon and Breach Sci., 1998, 272 p.
9. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, 2022, 410 p.
10. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Safarova N.A., Maharramov I.A., Kuliyev K.A. Optimal stabilization problems of oil production by gas lift method - stationary case, Proceedings of IAM, V.11, N.1, 2022, pp.17-26.
11. Aliev, F.A., Larin, V.B., Naumenko, K.I., Suntsev, V.I. Optimization of Linear Time Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, 1978.
12. Aliev, F.A. Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Elm, Baku, 1989.
13. Andreev, Yu.I. Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, 1976.
14. Bryson, A., Ho, Yu.Sh. Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, 1972.
15. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A. Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., V.5, N.1, 2014, pp.130-137.
16. Aliev F.A., Ismailov N.A. Zadachi optimizacii s periodicheskim krayevim usloviyem i granichnim upravleniyem v gazliftnikh skvajinakh, Nelineyniye Kolebaniya, V.17, N.2, 2014, s.151 –160. (Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimization Problems with Periodic Boundary Condition and Boundary Control in Gas Lift Wells, Nonlinear Oscillations, V.17, N.2, 2014, pp.151 – 160).
17. Kurcevich V.M., Lichak M.M. O reshenii diskretnikh matrichnikh uravneniy Lyapunova, Rikkati i ix obobsheniy, Kibernetika, 1980, N.3, s.13-18. (Kurtsevich V.M., Lychak M.M. On the solution of discrete matrix equations of Lyapunov, Riccati and their generalizations, Cybernetics, 1980, N.3, pp.13-18.)